Методы решения математических задач

А.В. Бодрова
Научный руководитель – доцент, канд. социол. наук Т.Н. Попова
Муромский институт Владимирского государственного университета
602264 г. Муром, Владимирской обл., ул. Орловская, д. 23
e-mail: oid@mivlgu.ru

Математические способы измерения социальной информации

Статистическое исследование завершается математическим расчетом и анализом показателей, которые представляют собой обобщающую характеристику какого-либо свойства совокупности или группы. Первичная статистическая информация выражается, прежде всего, в виде абсолютных показателей, которые являются количественной мерой всех форм учета. Абсолютные показатели характеризуют итоговую численность единиц совокупности или ее частей, размеры изучаемых процессов и явлений, выражают временные характеристики. Эти показатели всегда являются только именованными числами, где единица измерения выражается в конкретных цифрах. В зависимости от исследования единицы измерения могут быть натуральными, стоимостными и трудовыми. Натуральные единицы измерения соответствуют потребительским или природным свойствам товара или предмета и оцениваются в физических мерах массы, длины, объема. Стоимостные единицы измерения оценивают социально-экономические процессы и явления в денежном выражении. Одним из основных стоимостных показателей, характеризующих уровень экономического развития, является валовый внутренний продукт. Трудовые единицы измерения способны отражать затраты труда, трудоемкость технологических операций в человеко-днях, человеко-часах.

Вся совокупность абсолютных величин включает как индивидуальные показатели, которые характеризуют значения отдельных единиц совокупности, так и суммарные показатели, характеризующие итоговое значение нескольких единиц совокупности или итоговое значение существенного признака по той или иной части совокупности. Абсолютные показатели подразделяются на моментные и интервальные. Моментные абсолютные показатели характеризуют факт наличия явления или процесса, его размер (объем) на определенный момент времени. Интервальные абсолютные показатели характеризуют итоговый объем явления за тот или иной период времени (например, выпуск продукции за квартал или за год и т. д.), допуская при этом последующее суммирование. Абсолютные показатели не могут дать исчерпывающего представления об изучаемой совокупности или явлении, поскольку не могут отразить структуру, взаимосвязи, динамику, поэтому в статистике применяют относительные показатели, которые определяются на основе абсолютных показателей. Относительные показатели - это цифровые обобщающие показатели, они представляют собой результат деления двух статистических величин. Поэтому по отношению к абсолютным показателям относительные величины являются производными (вторичными). Относительные показатели могут быть получены или как соотношение одноименных статистических показателей, или как соотношение разноименных статистических показателей. В первом случае получаемый относительный показатель рассчитывается процентах. Если соотносятся разноименные абсолютные показатели, то относительный показатель в большинстве случаев бывает именованным. Относительный показатель структуры характеризует структуру совокупности, определяет удельный вес части в общем объеме совокупности. Данный показатель рассчитывают как отношение объема части совокупности к абсолютной величине всей совокупности, определяя тем самым удельный вес части в общем объеме совокупности. Относительный показатель координации характеризует соотношение между двумя частями исследуемой совокупности, одна из которых выступает как база сравнения. Относительный показатель планового задания используется для расчета изменения величины показателя плана по сравнению с его базовым уровнем в предшествующем периоде. Относительный показатель выполнения плана характеризует степень выполнения планового задания за отчетный период. Относительный показатель динамики характеризует изменение объема одного и того же явления во времени в зависимости от принятого базового уровня. Данный показатель рассчитывают как отношение уровня анализируемого явления или процесса в текущий момент времени к уровню этого явления или процесса за прошедший период времени. В результате мы получаем коэффициент роста, который выражается кратным отношением. При исчислении этой величины в процентах получаем темп роста. Темпы роста можно вычислять как с постоянным базовым уровнем (базисные темпы роста), так и с переменным базовым уровнем (цепные темпы роста). Относительный показатель сравнения – это соотношение одноименных абсолютных показателей, относящихся к разным объектам, но к одному и тому же времени (например, соотносятся темпы роста населения в разных странах за один и тот же период времени). Относительный показатель интенсивности характеризует степень распространения изучаемого явления или процесса в присущей им среде. Примерами показателей интенсивности могут служить показатели уровня благосостояния граждан, показатели обеспеченности населения. При расчете необходимо правильно выбрать базу сравнения или среду распространения явления. Критерием правильности расчета является сопоставимость по разработанной методологии расчета сравниваемых показателей, применяющихся в статистической практике.

Литература

1. Ефимова М.Р., Бычкова С.Г. Социальная статистика. Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 560 с.

2. Соколов Г.А., Гладких И.М. Математическая статистика: Учебник для вузов / Г.А. Соколов, И.М. Гладких. – М.: Издательство «Экзамен», 2004. – 432 с.

Н.Н. Выдрина
Научный руководитель – профессор, канд. техн. наук Е.Н. Мошнина
Муромский институт Владимирского государственного университета
602264 г. Муром, Владимирской обл., ул. Орловская, д. 23
Email: oid@mivlgu.ru

Модель естественного роста выпуска продукции

Рассмотрим непрерывную экономическую модель роста выпуска продукции. Пусть $Q(t)$ - количество продукции, реализованной к моменту времени t по цене p, а полученный при этом доход - $Q(t)p$. Предположим, что часть дохода расходуется на инвестиции в производство $I(t) = mpQ(t)$, которую определяет коэффициент m - норма инвестиций, принимающий значения от нуля до единицы, иначе развития производства не будет. Если предположить ненасыщаемость рынка сбыта, скорость роста выпуска продукции принять пропорциональной (с коэффициентом l) увеличению инвестиций – принцип акселерации, то для анализа модели получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$Q'(t) = mlpQ(t). \qquad (1)$$

Разделив переменные и проинтегрировав каждую часть уравнения по своей переменной, получим общее решение уравнения естественного роста выпуска продукции

$$Q(t) = Ce^{mlpt} \text{ -} \qquad (2)$$

непрерывную возрастающую функцию, имеющую выпуклость вниз.

Поскольку цена продукции зависит от объема ее выпуска $p = p(Q)$ как убывающая положительная функция, то из (1) получим нелинейное уравнение

$$Q'(t) = mlp(Q)Q(t). \qquad (3)$$

Учитывая, что все коэффициенты и функции в (3) положительны, объем выпуска продукции как и в предыдущем случае растет со временем. Для более детального анализа требуется установить характер зависимости $p = p(Q)$. Пусть эта зависимость линейная с коэффициентами a и b: $p(Q) = a - bQ$. Тогда из (3) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$Q'(t) = ml(a - bQ)Q(t), \qquad (4)$$

общее решение которого (с константой интегрирования C) имеет вид

$$Q(t) = \frac{aCe^{almt}}{1 + bCe^{almt}}, \qquad (5)$$

Графиком (5) является логистическая кривая [1], имеющая выпуклость вниз при $Q'' > 0$ при $Q < \frac{a}{b}$, выпуклость вверх $Q'' < 0$ при $Q > \frac{a}{b}$, и точку перегиба при $Q = \frac{a}{b}$. Процесс имеет быстрый рост при малых промежутках времени, то есть на начальном этапе развития производства эффективность инвестиций выше, но в дальнейшем темпы роста замедляются - график имеет выпуклость вверх, и объем выпуска выходит на стационарный режим (при $t \to \infty$) – то есть асимптотически стремится к $Q(t) \to \frac{a}{C}$ - имеется насыщение.

Литература

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. - М.: Дело, 2002. - 688 с.

Ю.В. Горина
Научный руководитель – профессор, канд. техн. наук Е.Н. Мошнина
Муромский институт Владимирского государственного университета
602264 г. Муром, Владимирской обл., ул. Орловская, д. 23
e-mail: Oid@Mivlgu.ru

Анализ динамической модели Кейнса

В настоящее время в исследовании, анализе и прогнозировании экономических процессов часто применяют методы математического моделирования. Конечно, следует иметь в виду, что анализ требует построения адекватной модели и возможности переноса полученных результатов в реальный процесс, что сопряжено с большими трудностями.

Исследуем динамику национального дохода с помощью динамической модели Кейнса [1]. Введем следующие обозначения: $Y(t)$ - национальный доход, $I(t)$ - инвестиции, $E(t)$ - государственные расходы, $S(t)$ - потребление. Уравнение баланса между национальным доходом и его расходными частями для модели имеет вид:

$$Y(t) = E(t) + S(t) + I(t). \tag{1}$$

Причем общее потребление складывается из внутреннего потребления национального дохода, определяемого коэффициентом склонности к потреблению $a(t)$ (заметим, что его значения находятся в пределах $0 < a(t) < 1$), и конечного потребления, определяемого коэффициентом $b(t)$, характеризующим автономное потребление - часть общих реальных потребительских расходов, которая не зависит от уровня реального располагаемого дохода:

$$S(t) = a(t)Y(t) + b(t). \tag{2}$$

Размер инвестиций определяется коэффициентом акселерации $k(t)$, который характеризуется инфраструктурой государства и уровнем технологии, и скорость изменения национального дохода

$$I(t) = k(t)Y'(t). \tag{3}$$

Все входящие в уравнения математической модели функции и коэффициенты положительны. После подстановки (2) и (3) в уравнение баланса и преобразований получим неоднородное дифференциальное уравнение для динамики национального дохода

$$Y'(t) - \frac{1 - a(t)}{k(t)} Y(t) = -\frac{b(t) + E(t)}{k(t)} . \tag{4}$$

Решение уравнения (4) очень сложно, мы рассмотрим его частный случай, когда все коэффициенты – постоянны. Тогда уравнение

$$Y'(t) - \frac{1 - a}{k} Y(t) = -\frac{b + E}{k} \tag{5}$$

является линейным с постоянными коэффициентами. Найдем его общее решение

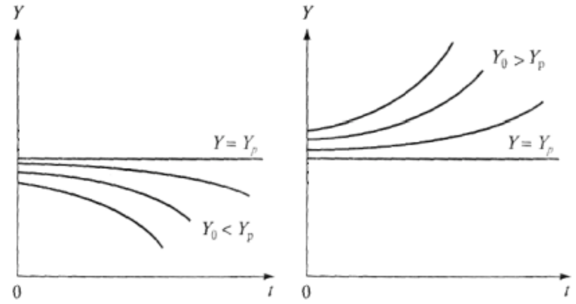
$$Y(t) = Ce^{\frac{1-a}{k}t} + \frac{E + b}{1 - a}$$

(6)

состоит из двух слагаемых: общего решения однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному $Y_o(t) = Ce^{\frac{1-a}{k}t}$, и частного решения $Y_p(t) = \frac{E + b}{1 - a}$, которое получим, если найдем равновесное (стационарное) решение, положив в начальный момент времени $Y'(0) = 0$.

Зададим параметры a, b, E, k и проанализируем динамику национального дохода. Пусть коэффициент склонности к потреблению равен 0,5, а коэффициент акселерации равен 0,1. Равновесному решению соответствует горизонтальная прямая $Y(t) = Y_p, C = 0$. Поскольку показатель экспоненты будет всегда положительным, то, если в начальный момент времени

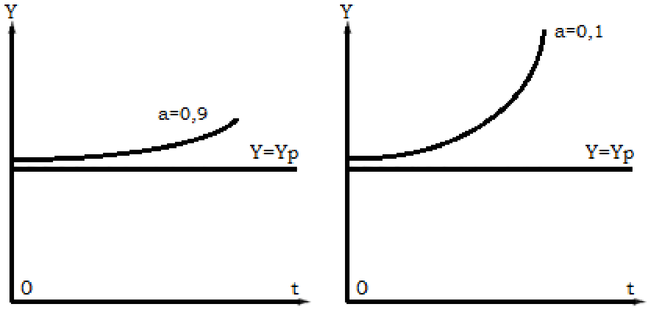
$Y(0) = Y_0 < Y_p, C < 0$ интегральные кривые уйдут вниз от равновесного положения (рис.1.1), - величина национального дохода со временем уменьшится. Если в начальный момент времени $Y(0) = Y_0 > Y_p, C > 0$, кривые уйдут вверх от равновесной прямой (рис. 1.2).



1.1 1.2

Рис.1 Графики интегральных кривых

Уровень наклона интегральных кривых зависит от параметра а, то есть от величины склонности к потреблению. При увеличении этого показателя (например, до 0.9) уровень наклона семейства кривых понижается (рис. 2.1), и наоборот (например, при уменьшении до 0,1) – рост национального дохода увеличивается при снижении потребления (рис. 2.2).



2.1 2.2

Рис.2 Зависимость наклона интегральных кривых от величины склонности к потреблению

Литература

1. Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005. – 472 с.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: Юнити-Дана, 2005. - 399 с.

М.А. Мокеева
Научный руководитель – доцент, канд. социол. наук Т.Н. Попова
Муромский институт Владимирского государственного университета
602264 г. Муром, Владимирской обл., ул. Орловская, д. 23
e-mail: oid@mivlgu.ru

Применение полного дифференциала функции двух переменных

Целью выполненной работы является изучение понятия полного дифференциала функции двух независимых переменных и его применения к прикладным задачам математики и физики. Полным дифференциалом функции двух переменных называется главная часть приращения функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y), линейная относительно приращений Δx и Δy. Найдем полное приращение функции и, применив формулу полного дифференциала, получим выражение для приближенных вычислений:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y)+\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y.$$

Данное равенство верно с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx и Δy. Разность между полным приращением и полным дифференциалом в данной точке есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx и Δy.

В докладе даны примеры использования данной формулы: вычислены приближенные значения функций (алгебраической и тригонометрической), решена задача на вычисление объема материала, необходимого для изготовления цилиндрического стакана заданных размеров: радиус внутреннего цилиндра r, высота внутреннего цилиндра h, толщина стенок и дна стакана t. Приведены два способа решения данной задачи: точное и приближенное. Первое (точное) решение задачи дано с использованием геометрических формул. Искомый объем ищем как разность между объемами внешнего и внутреннего цилиндров. В приближенном решении объем внутреннего цилиндра мы рассматриваем как функцию двух независимых переменных r и h, находим частные производные, полный дифференциал данной функции и вычисляем приближенное значение объема. Решив задачу для конкретных числовых значений и сравнивая полученные результаты обоих методов, найдем погрешность произведенных вычислений, которая в числовых значениях составляет около $0{,}3\pi$, что составляет менее 2%.

С помощью формулы полного дифференциала можно также оценить погрешность при выполнении математических вычислений. При определении эмпирическим способом величин x и y функции двух независимых переменных, допускаются погрешности Δx и Δy. В данном случае значение функции z, вычисленное по измеренным (неточным) значениям аргументов, получится с погрешностью Δz. При малых абсолютных значениях величин Δx и Δy, заменим полное приращение функции полным дифференциалом:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x+\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Значения частных производных и значений погрешностей аргументов могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Возьмем их абсолютные величины и составим неравенство для оценки погрешности. Вычисление погрешностей измерений можно производить при решении задач по планиметрии или физике. В работе определен период колебания математического маятника и найдена относительная погрешность произведенных вычислений.

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: учебник для втузов. В 3 т. Т.2. – М.: Дрофа, 2007. – 510 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие по математике для втузов в 2-х томах. Т.1. – М.: Издательство «Наука», 1985. – 560 с.

А.С. Мурындин
Научный руководитель – преподаватель специальных дисциплин К.В. Мортин
Муромский техникум радиоэлектронного приборостроения
г. Муром Владимирской области, ул. Комсомольская, д. 55
e-mail: mtrp@yandex.ru

Интеллектуальный выбор решения сложных нелинейных алгебраических уравнений с наименьшей степенью погрешности вычисления

Огромное количество задач вычислительной математики связано с решением нелинейных алгебраических уравнений, а также систем таких уравнений. При этом необходимость решения нелинейных уравнений возникает зачастую на промежуточных шагах, при реализации фрагментов более сложных алгоритмов .

Основными критериями при выборе того или иного метода решения являются скорость сходимости, надежность и область применимости в той или иной области. Скорость сходимости измеряется числом обращения к вычислению функции. Надежность метода дихотомии, хорд, простых итераций, Ньютона определяется сходимостью при различных видах функции. Любой метод на том или ином участке вида функции может не сходиться, при этом выдавая неверный результат. Алгоритм расчета должен показывать пользователю о том, что происходит расходимость метода и, как следствие, невозможность решения поставленной задачи.

Область применения различных методов определяется теми видами функций, для которых метод дает надежную сходимость, поэтому метод дихотомии работает на любых непрерывных функциях, но имеется большой недостаток этого метода: при делении объёма понятия на два противоречащих понятия каждый раз остаётся крайне неопределённой его часть. Кроме того, если в начале дихотомического деления обычно довольно легко установить наличие противоречащего понятия, то по мере удаления от первой пары понятий найти его становится всё труднее и труднее для программной реализации. А так как недостаток метода хорд заключается в недостатке дихотомии, его использовать нерационально при решении актуально поставленной задачи математического моделирования различных форм представления моделей.

А если мы работаем с достаточно узким классом функций, то, следовательно, в программную реализацию необходимо заложить актуальность наиболее хорошего метода, который работает именно в этом классе решаемой проблемы. Недостаток метода простых итераций решения нелинейных уравнений заключается в том, что в случае сложных функций можно посмотреть поведение аппроксимирующих их полиномов, а для трех и более неизвестных, а также для комплексных корней, удовлетворительных способов подбора начального приближения нет. Так как метод Ньютона отличается высокой скоростью сходимости при выполнении условий сходимости, на практике критерием работоспособности метода является число итераций: если оно оказывается большим (для большинства задач >100), то начальное приближение выбрано плохо.Программное обеспечение позволяет сравнить эффективность различных методов при решении той или иной задачи, выбрать допустимые погрешности при решении и сравнить представлении формы одной и той же задачи. Выбор метода поиска осуществляется автоматически, то есть если мы выбрали расчет в заданном интервале, поиск ведется методом дихотомии, а если мы выбираем первоначальную точку, то поиск ведется методом Ньютона с дополнением.

М.Е. Теняева
Научный руководитель – профессор, канд. техн. наук Е.Н. Мошнина
Муромский институт Владимирского государственного университета
602264 г. Муром, Владимирской обл., ул. Орловская, д. 23
e-mail: oid@mivlgu.ru

Применение различных видов аппроксимации нелинейностей в анализе динамики розничной торговли

В настоящее время аналитика экономических процессов строится на интенсивном использовании вычислительной математики, статистических алгоритмов, методов математического программирования. Применение этих областей наук позволяет более точно получить общее представление о значении тех или иных экономических показателей, проанализировать динамику, а также адекватно и с наибольшей вероятностью смоделировать прогноз их развития.

Розничная торговля - продажа единицы товара или в небольших количествах для личного, частного использования конечным потребителем, является важнейшей отраслью хозяйственной деятельности. Основным показателем работы торговых предприятий государства является розничный товарооборот. По данным Федеральной службы Государственной статистики [3] рассмотрим динамику оборота розничной торговли по стране с февраля по ноябрь 2011 года. Заметим, что имеется рост товарооборота по стране: к концу года его величина достигла 1692,9 млрд. руб., что в товарной массе составляет 124,85% к февралю 2011. Особо активно насыщается рынок непродовольственных товаров, чей удельный вес за 2011 год составил 53%, при этом к концу года величина оборота достигла 897,5 млрд. руб., увеличившись на 30,1% относительно февраля.

Чтобы выявить тенденцию и сделать прогноз изменения этого показателя, аппроксимируем отчетные данные с помощью функциональной зависимости. Путем расчетов получено, что наилучшим образом при преобразовании величин зависимость аппроксимирует логарифмическая функция $y = \ln(x+1)$ на интервале [-0.7; 0.9].

Так как процесс вычисления логарифмической функции трудоемок и длителен, предварительно была произведена аппроксимация полиномами Тейлора, Чебышева, Лежандра [1], методом наименьших квадратов [2]. Проанализировав результаты и оптимизировав коэффициенты, получен многочлен четвертого порядка (1):

$$y = 0{,}002 + 0{,}967 * x - 0{,}51 * x^2 + 0{,}55 * x^3 - 0{,}34 * x^4 \qquad (1)$$

Данный многочлен (1) имеет максимальную абсолютную погрешность 0,0089, тогда как у других сравниваемых полиномов ошибка менее 0,01 достигается только при увеличении степени на один и более порядков (рис.1), что увеличивает время вычисления.

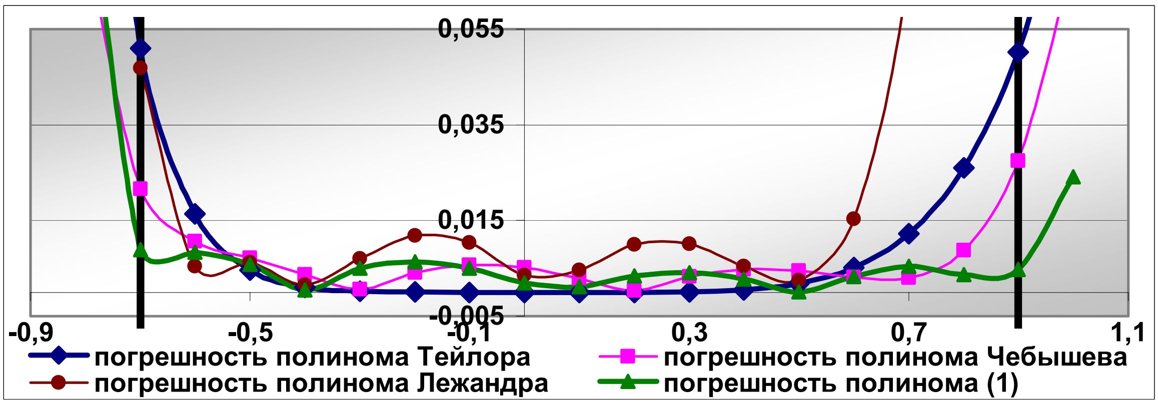
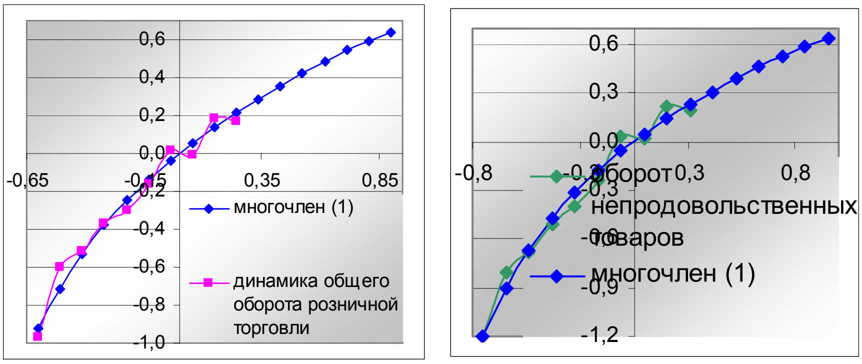


Рис. 1. График погрешности анализирующих функций на интервале [-0.7; 0,9]

Анализируя график, можно сказать, что многочлен Тейлора пятого порядка на интервале [-0.7; 0.9] будет иметь максимальную погрешность 0,051, полином Чебышева пятой степени 0,027, а Лежандра пятого порядка больше 0,08:Таким образом, многочлен (1) является самым эффективным степенным разложением логарифмической функции

По рассматриваемому полиному (1) быт произведен трендовый анализ и прогнозирование оборота розничной торговли до 1 июля 2012 г. (рис.2.).



А Б

Рис.2. Трендовый анализ и прогнозирование оборота розничной торговли в России: А – общий оборот розничной торговли; Б – оборот непродовольственных товаров

Анализируя график (рис.2), можно сделать вывод, что поскольку многочлен (1) аппроксимирует кривые с наименьшим среднеквадратическим отклонением, то и прогнозирование следует считать более всего вероятным.

Моделирование динамики общего товарооборота (рис.2, А) показывает, что при той же скорости роста на 1 июля 2012 данный показатель возрастет до 1832,44 млрд. руб., что говорит о стремительном увеличении сбыта продукции и повышения платежеспособности населения.

Трендовый анализ оборота непродовольственных товаров (рис.2, Б) предположительно также дает стремительный рост до 963,9 млрд. руб. к 1 июля 2012 года, то есть по данному способу оборот непродовольственных продаж увеличится на 130 млрд.руб.

Таким образом, аппроксимация функции $y = \ln(x+1)$ способствует быстрому нахождению ее значения, а также возможности анализа и наиболее вероятного прогнозирования экономических и статистических показателей, имеющих с функцией $y = \ln(x+1)$ наименьшее среднеквадратическое отклонение.

Литература

1. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы графики таблицы. М.: Наука, 1977. – 344 с.

2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. - М.: Дело, 2002. - 688 с.

3. Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.gks.ru.